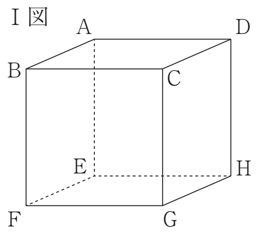
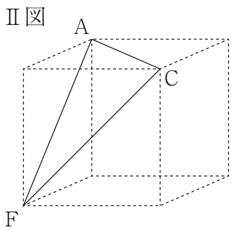
第 26 講　立体の切断

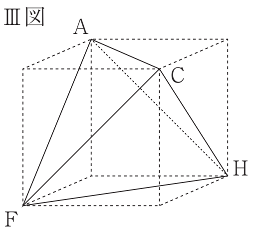
Step 1

1　次のⅠ図のように，1 辺が 6 cm の立方体 ABCD—EFGH がある。

このとき，次の問い(1)・(2)に答えよ。







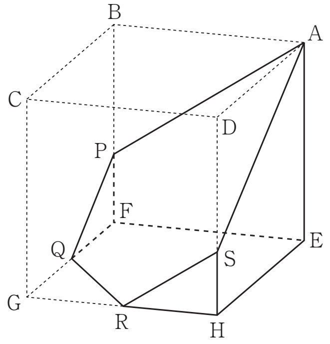
(1)　Ⅰ図の立方体 ABCD—EFGH の 3 つの頂点 A，F，C を結んでできる上のⅡ図のような △AFC の面積を求めよ。

(2)　Ⅰ図の立方体 ABCD—EFGH の 4 つの頂点 A，F，C，H を結んでできる上のⅢ図のような三角錐（すい）AFCH の体積を求めよ。また，Ⅲ図の三角錐 AFCH において，△AFC を底面としたときの高さを求めよ。

【京都府】

2　右の図のように，1 辺の長さが 6 cm の立方体 ABCD—EFGH を，切り口が五角形になるように頂点 A を通る平面で切り，できた 2 つの立体のうち，頂点 E を含むものを立体 X とする。また，切り口の五角形の頂点を順に A，P，Q，R，S とすると，PF ＝ SH ＝ 2 cm で，点 Q と点 R はそれぞれ線分 FG，線分 GH の中点であった。

このとき，次の問い(1)・(2)に答えよ。



(1)　2 点 A，S を通る直線と，2 点 E，H を通る直線との交点を T とするとき，線分 TH の長さを求めよ。また，∠HRT の大きさを求めよ。

(2)　立体 X の体積を求めよ。

【京都府】

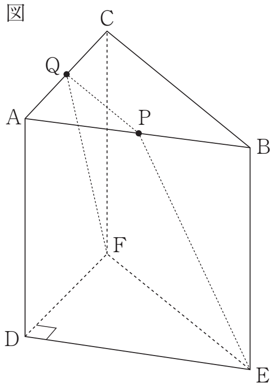
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step 2

3　底面が DE ＝ DF ＝ 6 cm，∠EDF ＝ 90° である直角二等辺三角形で，側面 ADEB と側面 ACFD がともに正方形である三角柱 ABC―DEF において，辺 AB，AC の中点をそれぞれ P，Q とする。この三角柱 ABC― DEF を図のように 4 点 P，Q，F，E を通る平面で切断し，頂点 A を含む立体を X，頂点 B を含む立体を Y とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

図



問 1　辺 EF の長さを求めなさい。

問 2　立体 X において，線分 EP を延長した直線と線分 DA を延長した直線との交点を R とする。

このとき，次の(1)，(2)に答えなさい。

(1)　線分 AR の長さを求めなさい。

(2)　立体 R―APQ の体積を求めなさい。

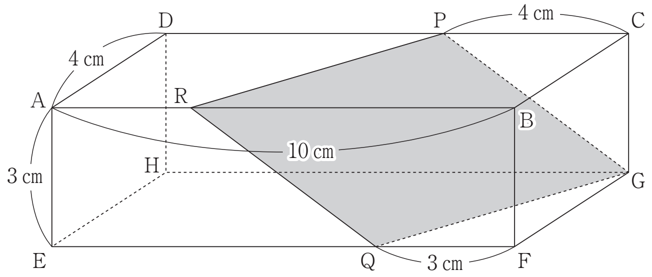
問 3　立体 X と立体 Y の体積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

【鳥取県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　次の図のように，AB = 10cm，AD = 4 cm，AE = 3 cm の直方体がある。辺 CD 上に CP = 4 cm となる点 P，辺 EF 上に FQ = 3 cm となる点 Q をとる。さらに，辺 AB 上に点 R を 4 点 P，R，Q，G が同じ平面上にあるようにとると，四角形 PRQG は平行四辺形となる。

このとき，(1)〜(3)の各問いに答えなさい。



(1)　RQ の長さを求めなさい。

(2)　RB の長さを求めなさい。

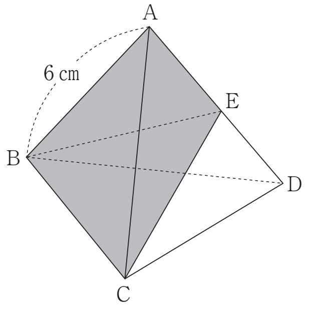
(3)　直方体を平面 PRQG で 2 つの立体に分ける。その 2 つの立体のうち，頂点 A を含む立体の体積を V_1，頂点 B を含む立体の体積を V_2 とするとき，$V_1 : V_2$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

【佐賀県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step　3

5　右の図のように，すべての辺の長さが6cmの正四面体ABCDがあり，辺ADの中点をEとします。この正四面体を3点B，C，Eを通る平面で切ったとき，三角錐ABCEの体積を求めなさい。



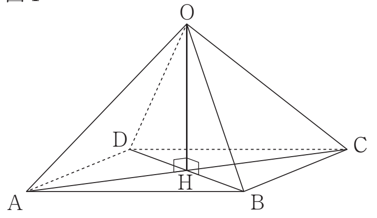
【埼玉県】

6　すべての辺の長さが4cmである正四角錐（すい）OABCDがある。このとき，次の1，2に答えなさい。

1　図1のように，正四角錐において，底面の正方形ABCDの対角線AC，BDの交点をHとするとき，線分OHは底面の正方形ABCDと垂直である。

　このとき，線分OHの長さを求めなさい。

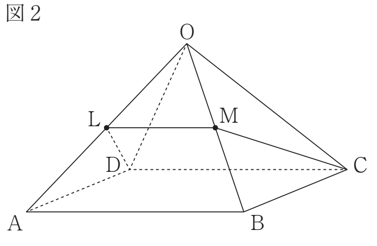
図1



2　図2のように，正四角錐の辺OA，OBの中点をそれぞれL，Mとし，4点L，M，C，Dを通る平面で正四角錐を切る。

　このときできる立体LMABCDの体積を求めなさい。

図2



【山梨県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第26講　立体の切断

Step 1

1　(1) $18\sqrt{3}$ (cm^2)　(2) (体積) 72 (cm^3)　(高さ) $4\sqrt{3}$ (cm)

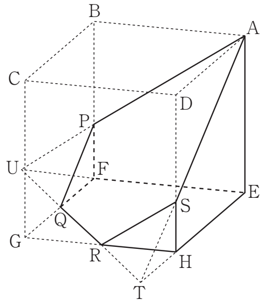
≪解説≫

(1) AC = AF = CF = $6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (cm)なので，△AFC は正三角形となり，高さは，$6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ (cm)　よって，求める面積は，$\dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3}$ (cm^2)

(2) 三角錐 AFCH の体積は，立方体から三角錐 ABCF の体積 4 つ分をひけばよいので，$6^3 - \left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6^2 \times 6\right) \times 4 = 72$ (cm^3)　よって，△AFC を底面としたときの高さを h cm とすると，$\dfrac{1}{3} \times 18\sqrt{3}h = 72$ が成り立つので，$h = 4\sqrt{3}$ (cm)

2　(1) (TH =) 3 (cm)　(∠HRT =) 45°　(2) 75 (cm^3)

≪解説≫



(1) 右図において，HT ∥ GQ，HR = GR より，△THR は△QGR と合同な直角二等辺三角形になるので，TH = QG = $\dfrac{1}{2}$FG = 3 (cm)で，∠HRT = 45°

(2) (1)と同様に，2 点 A，P を通る直線と，2 点 E，F を通る直線との交点を U とすると，立体 X は，三角すい A—TEU から 2 つの合同な三角すい S—THR と P—QFU を除いたものになる。ET，EU の長さはともに，6 + 3 = 9 (cm)だから，求める体積は，$\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 9 \times 9\right) \times 6 - \left\{\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 2\right\} \times 2 = 75$ (cm^3)

Step 2

3　問 1. $6\sqrt{2}$ (cm)　問 2. (1) 6 (cm)　(2) 9 (cm^3)

問 3. ((X の体積)：(Y の体積) =) 7：5

≪解説≫

問 1. △DEF は直角二等辺三角形だから，EF = $\sqrt{2}$DE = $6\sqrt{2}$ (cm)

問 2. (1) RA：RD = AP：DE = 1：2 より，RA：AD = 1：(2 − 1) = 1：1 となるから，AR = AD = 6 cm　(2) 立体 R—APQ は，底面が△APQ，高さが AR の三角すいだか

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製·転載を禁止します。

ら，その体積は，$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 6 = 9\ (\mathrm{cm}^3)$

問 3. 三角すい R—APQ と三角すい R—DEF の相似比は，1：2 だから，体積比は，$1^3 : 2^3 = 1 : 8$　これより，立体 X の体積は，$9 \times (8 - 1) = 63\ (\mathrm{cm}^3)$　三角柱 ABC—DEF の体積は，$\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 6\right) \times 6 = 108\ (\mathrm{cm}^3)$ だから，立体 Y の体積は，$108 - 63 = 45\ (\mathrm{cm}^3)$　よって，(立体 X)：(立体 Y) = 63：45 = 7：5

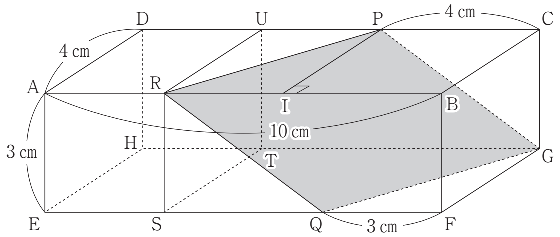
4　(1) 5 (cm)　(2) 7 (cm)　(3) ($V_1 : V_2 =$) 13：7

≪解説≫

(1) △PCG に三平方の定理を用いて，$\mathrm{PG} = \sqrt{\mathrm{PC}^2 + \mathrm{CG}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ (\mathrm{cm})$　よって，RQ = PG = 5 cm

(2) 次図のように，点 P から AB に垂線 PI を引く。$\mathrm{QG} = \sqrt{\mathrm{QF}^2 + \mathrm{FG}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ (\mathrm{cm})$ より，PR = QG = 5 cm　△PRI について，$\mathrm{RI} = \sqrt{\mathrm{PR}^2 - \mathrm{PI}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ (\mathrm{cm})$　IB = PC = 4 cm だから，RB = RI + IB = 3 + 4 = 7 (cm)

(3) 直方体を，点 R を通り面 AEHD に平行な面で切断し，次図のように，切断面を RSTU とする。AR = AB − RB = 10 − 7 = 3 (cm) だから，四角柱 AEHD—RSTU の体積は，$4 \times 3 \times 3 = 36\ (\mathrm{cm}^3)$　また，四角柱 RSTU—BFGC において，UP = QF = 3 cm，PC = SQ = 4 cm より，四角柱 RSTU—BFGC は四角形 PRQG で二等分されている。よって，$V_2 = \frac{4 \times 3 \times 7}{2} = 42\ (\mathrm{cm}^3)$，$V_1 = 36 + 42 = 78\ (\mathrm{cm}^3)$ となるから，$V_1 : V_2 = 78 : 42 = 13 : 7$



Step 3

5　$9\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

≪解説≫

△ACE は 3 辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形なので，$\mathrm{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ (cm)　BE = CE より，△EBC は二等辺三角形で，点 E から BC に垂線をひき，交点を H とおくと，$\mathrm{CH} = \frac{1}{2} \times 6 = 3\ (\mathrm{cm})$　△EHC で三平方の定理より，$\mathrm{EH} = \sqrt{\mathrm{CE}^2 - \mathrm{CH}^2} =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

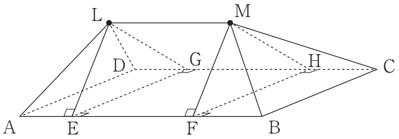
$\sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)　これより，$\triangle EBC = \frac{1}{2} \times BC \times EH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ (cm^2)　ここで，AE ⊥ BE，AE ⊥ CE なので，AE は△BCE に垂直で，三角錐 ABCE の底面を△EBC とすると，高さは，$AE = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ (cm)　よって，求める体積は，$\frac{1}{3} \times \triangle EBC \times AE = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{2} \times 3 = 9\sqrt{2}$ (cm^3)

6　1. $2\sqrt{2}$ (cm)　2. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

≪解説≫

1. H は正方形 ABCD の対角線 AC の中点。$AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$ (cm)なので，$AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (cm)　よって，直角三角形 OAH において，三平方の定理より，$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ (cm)

2. 右図のように，L，M から辺 AB にそれぞれ垂線 LE，MF をひき，さらに，E，F から辺 CD にそれぞれ垂線 EG，FH をひくと，立体 LMABCD は四角錐 LAEGD，四角錐 MFBCH，三角柱 LEG―MFH に分けられる。四角錐 LAEGD と四角錐 MFBCH は底面をそれぞれ長方形 AEGD，長方形 FBCH とすると，高さは，$\frac{1}{2}OH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (cm)　中点連結定理より，LM ∥ AB，$LM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ (cm)となり，四角形 LABM は等脚台形だから，$AE = BF = (4 - 2) \times \frac{1}{2} = 1$ (cm)　よって，四角錐 LAEGD と四角錐 MFBCH の体積は，$\frac{1}{3} \times 1 \times 4 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)　また，$\triangle LEG = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (cm^2)だから，三角柱 LEG―MFH の体積は，$2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$ (cm^3)　よって，立体 LMABCD の体積は，$\frac{4\sqrt{2}}{3} \times 2 + 4\sqrt{2} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。